

# Teknisk matematik 2 - Facitliste

---

## Indhold

1. Vektorregning i planen
2. Eksponentielle vækstfunktioner
3. Differentialregning
4. Integralregning og arealbestemmelse
5. Dataanalyse

## 1. Vektorregning i planen

1.01 a) - b)  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$  c)  $|\overrightarrow{AB}| = 7,21$ ,  $|\overrightarrow{CD}| = 5,10$ ,  $|\overrightarrow{EF}| = 7,62$

1.02 a)  $|\vec{a}| = 5,83$  b)  $(7, -2)$

1.03 a)  $|\vec{b}| = 4,47$  b)  $(5,3)$

1.04 a)  $|\vec{a}| = 9,22$ ,  $|\vec{b}| = 5,83$ ,  $|\vec{c}| = 8,06$  b)  $v_a = 12,53^\circ$ ,  $v_b = 59,04^\circ$ ,  $v_c = 29,74^\circ$

1.05  $(5,20; 4,68)$

1.06  $(-2,48; -8,65)$

1.07 a)  $|\vec{a}| = 3,61$  b)  $(6,5)$  c)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$  d)  $|0,5 \cdot \vec{a}| = 1,80$  e)  $(0; -0,5)$

1.08  $|\vec{e} + \vec{f}| = 29,2$

1.09  $|\vec{p} + \vec{q}| = 27,32$

1.10 a)  $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  c)  $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$  d)  $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$  e)  $\begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \end{pmatrix}$  f)  $\begin{pmatrix} 10,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.11 a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$  b)  $6,08$

1.12  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $|\vec{c}| = 10,77$

1.13  $\vec{F} = \begin{pmatrix} -9,41 \\ 138,07 \end{pmatrix}$ ,  $|\vec{F}| = 138,39 \text{ N}$

1.14 a)  $\vec{a}_b = \begin{pmatrix} 7,34 \\ 11,00 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_c = \begin{pmatrix} -3,33 \\ 10 \end{pmatrix}$  b)  $|\vec{a}_b| = 13,23$ ,  $|\vec{a}_c| = 10,54$

1.15 a)  $\begin{pmatrix} 0,419 \\ -0,671 \end{pmatrix}$  b) 0,8 c)  $302,1^\circ$

1.16 a)  $\begin{pmatrix} -10,14 \\ 9,91 \end{pmatrix}$  b) 14,18 c)  $135,68^\circ$

1.17 a) 11,36 b) 16,96

1.18 a) 25,72 b) 9,60

1.19 a)  $\begin{pmatrix} 9,19 \\ 25,72 \end{pmatrix}$  b) 10,52 c)  $330,92^\circ$

1.20 a)  $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ , 9,22 b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ , 8,06 c)  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 3,61

1.21  $\vec{e} = \begin{pmatrix} -0,83 \\ 0,55 \end{pmatrix}$

1.22  $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0,88 \\ 0,48 \end{pmatrix}$

1.23 a)  $\begin{pmatrix} 0,95 \\ -0,32 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} -0,45 \\ -0,89 \end{pmatrix}$

1.24 a)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 4,12 b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 2,24 c)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ , 4,24 d)  $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 5,10 e)  $\begin{pmatrix} 21,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 21,59

1.25 a) -9 b) 9 c) 9

1.26 a) 12,5 b) -12,5 c) -25

1.27 a)  $7,13^\circ$  b)  $3,37^\circ$  c)  $63,43^\circ$

1.28 a) 10 b)  $\pm 6$  c) 0

1.29 a)  $C = 90^\circ$  b)  $A = 63,43^\circ$ ,  $B = 26,57^\circ$

1.30 *Firkant ABCD er et rektangel*

1.31 *Vektorerne står vinkelret på hinanden*

1.32 a)  $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$  c)  $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.33 (8,12)

1.34 (0,0), (4, -1), (4,5)

1.35 Løsning 1:  $C(6,3), D(7, -3)$  Løsning 2:  $C(-6,1), D(-5, -5)$

1.36 a)  $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, 7,21$  b)  $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, 8$  c)  $-21$  d)  $\begin{pmatrix} -15 \\ -25 \end{pmatrix}$  e)  $\begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix}$  f)  $\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$  g) 20

h)  $95,91^\circ$

1.37 a) 1,5 b) 3,5 c) 5,5 d) 0,50

1.38  $\begin{pmatrix} 0,77 \\ 1,15 \end{pmatrix}, 1,39$

1.39 a)  $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  b) 2,68 c) 1,79

1.40 6,64

1.41 a) 14,43 kN b) 17,68 kN c) 25 kN d) 48,30 kN

1.42 a) 4,42 kN b)  $29,94^\circ$  (i forhold til G)

1.43 a) - b)  $|\vec{s}_1| = 4,10 \text{ kN}, |\vec{s}_2| = 1,56 \text{ kN}$

1.44 a)  $z = 4,26^\circ$  b)  $v = 326,5 \frac{\text{km}}{\text{time}}$

## 2. Eksponentielle vækstfunktioner

2.01 a)  $x = 2,3219$  b)  $x = 0,3219$  c)  $x = 2,0792$

2.02 Beregningen giver  $L_{1-2} = 99,19 \text{ dB}$ , hvilket må anses for rimeligt i forhold til den målte værdi.

2.03  $L_{A,eq} = 88,26 \text{ dB}(a) < 90 \text{ dB}(a)$

2.04 a)  $f(x) = 5,2 \cdot 0,4^x$  b)  $f(x) = 5 \cdot 2^x$  c)  $f(x) = 2,5 \cdot 4^x$  d)  $f(x) = 75,31 \cdot 0,6518^x$

2.05 -

2.06 a)  $f(x) = 6 \cdot 0,5^x$  b)  $T_{\frac{1}{2}} = 1$

2.07  $f(x) = 41,01 \cdot 0,8409^x$

2.08 a)  $K_1 = 5075 \text{ kr.}, K_5 = 5386,42 \text{ kr.}, K_{10} = 5802,70 \text{ kr.}$

b)  $K_1 = 5125 \text{ kr.}, K_5 = 5657,04 \text{ kr.}, K_{10} = 6400,42 \text{ kr.}$

c)  $K_1 = 5200 \text{ kr.}, K_5 = 6083,26 \text{ kr.}, K_{10} = 7401,22 \text{ kr.}$

2.09  $K = 16920,98$  kr.

2.10  $x = 99,36$  m

2.11 a) 9804,87 kg   b) 20,07 timer   c)  $T_{\frac{1}{2}} = 34,31$    d)  $t = 237$  timer

2.12 a)  $K = 6391,29$    b) *Processen forløber 29,69 gange hurtigere*

2.13 a)  $a = 56, K = 0,05523$    b)  $T = 30,13$  °C   c)  $t = 36,88$  minutter

### 3. Differentialregning

3.01  $f'(x) = 1$

3.02  $f'(x) = 8$

3.03 a)  $f'(x) = 0,5x$    b)  $f'(1) = 0,5$    c)  $y = 0,5x - 0,25$    d)  $y = -2x + 2,25$

3.04 a)  $f'(x) = 6$    b)  $y = 12x - 12$

3.05 a)  $f'(x) = -x^{-2}$    b)  $f'(0,5) = -4, f'(1) = -1, f'(2) = -0,25$

c)  $f'(-0,5) = -4, f'(-1) = -1, f'(-2) = -0,25$

3.06 a)  $f'(x) = 0,5x^{-0,5}$    b)  $f'(0,5) = 0,707, f'(1) = 0,5, f'(2) = 0,35$

3.07  $f$  er diskontinuert i  $x = 2$

3.08  $f$  er diskontinuert i  $x = 3$

3.09 a)  $f$  er kontinuert i  $x = 0$    b)  $f$  er ikke differentiabel i  $x = 0$

3.10 a)  $f$  er diskontinuert i  $x = 1$    b)  $f$  er ikke differentiabel i  $x = 1$

3.11 a)  $f'(x) = -8x^2$    b)  $f'(x) = 12x^2$    c)  $f'(x) = 3x^5$    d)  $f'(x) = 4,5x^9$

e)  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$    f)  $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$    g)  $f'(x) = -12x^{-13}$    h)  $f'(x) = 24x^{-5}$

3.12 a)  $f'(x) = 15x^2 + 6x - 12$    b)  $f'(x) = (12x^3 + 2x)(2 - 3x) - 3(3x^4 + x^2 - 3)$

c)  $f'(x) = \frac{2x^2 + 8x + 3}{(x+2)^2}$

3.13 a)  $(3, -4)$    b)  $t_1: y = 4x - 20, t_2: y = -4x + 4$

3.14  $Areal = 2,67$

3.15  $y = 12x + 18, = 12x - 14$

3.16  $y = 5x - 4$

3.17  $t_1: y = -1,46x - 0,16$ ,  $t_2: y = 5,46x - 27,84$

3.18  $y = 0,33x + 6,78$

3.19  $f(x) = 0,5x^2$

3.20 a) Lokalt maxi i  $(-1,67; 8,48)$ , Lokalt mini i  $(1, -1)$  b) –

3.21 a)  $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$  b) Lokalt maxi i  $(0,0)$ , Lokalt mini i  $(4; -10,67)$  c) –

3.22 a)  $x = 120$  m og  $y = 240$  m b) Areal =  $28.800$  m<sup>2</sup>

3.23 a) Bredde = højde =  $10,61$  m b) Areal =  $112,57$  cm<sup>2</sup>

3.24 a) Bredde =  $8,66$  cm og højde =  $12,25$  cm b)  $W = 216,51$  cm<sup>3</sup>

3.25 a)  $a = 1,4$  m og  $b = 0,7$  m b) Areal =  $1,75$  m<sup>2</sup>

3.26 a)  $a = 2,24$  m og  $b = 2,24$  m b) Areal =  $27,96$  m<sup>2</sup>

3.27  $AD = DC = 316,22$  mm

3.28  $x = 126,49$  m og  $y = 252,98$  m

3.29 a) Cylinder:  $d = 1,72$  m,  $h = 0,86$  m. Kegel:  $d = 2,21$  m,  $h = 1,56$  m

Kasse:  $x = 1,587$  m,  $h = 0,794$  m

b) Cylinder: Areal =  $6,97$  m<sup>2</sup>, Kegel: Areal =  $6,64$  m<sup>2</sup>, Kasse: Areal =  $7,56$  m<sup>2</sup>

Valg: Keglen, da arealet er det mindste

3.30 a)  $AP = 6$  km

3.31  $z = 96,97^\circ$

3.32 Skorstenen kan ikke komme om hjørnet, da den mindst mulige længde er  $44,16$  m.

3.33  $v = 80,4^\circ$

3.34 Vandstanden  $> 4$  meter

3.35 Kloakrøret ligger  $1,2$  meter under terræn og overholder kravet på  $0,9$  meter.

3.36 a)  $x = 2886,75$  m b)  $u = 5,97$  mm

3.37 a) Afstanden  $CR = 5,87$  km b)  $37,92$  km

3.38 Bebyggelsen overholder kravet, da den mindste afstand er  $223,6$  meter.

## 4. Integralregning og arealbestemmelse

4.01 a)  $\frac{1}{6}x^6 + k$  b)  $-\frac{1}{4}x^{-4} + k$  c)  $\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + k$  d)  $\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} + k$

4.02 a)  $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + k$  b)  $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + 36$

4.03 a) 0,25 b) -0,25 c) 0

4.04 a) 0,247 b) 1,8856 c) -13,5 d) 0,6357

4.05  $A = 8$

4.06  $A = 3$

4.07  $A = 8$

4.08 a) - b)  $A = 8,13$

4.09  $A = 20,83$

4.10 a) 0,6931 b) 0,6931 c) 1,0986

4.11 a)  $y = x + 1$  b)  $y = e \cdot x$

4.12 a)  $f(x) = 4,0435 \cdot 2,2240^x$  b)  $f'(x) = 3,2320 \cdot 2,2240^x$  c)  $y = 15,99x - 11,97$

4.13 a)  $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$  b)  $y = -x$  c)  $y = -3,5x + 3,69$

4.14 a)  $y = 2x + 1$  b)  $y = 14,778x - 7389$

4.15 a)  $f'(x) = \frac{5-5\ln x}{x^2}$  b)  $Max: (2,718; 1,839)$  c) -

4.16 a)  $f'(x) = \frac{4e^x - 4xe^x}{e^{2x}}$  b)  $Max: (1; 1,472)$  c) -

4.17 a)  $f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$  b)  $Min: (0,231; 1,890)$

4.18 a)  $5^x \cdot \frac{1}{\ln 5} - \frac{x^3}{3} + x^4 + k$  b)  $e^x + 2^x \cdot \frac{1}{\ln 2} + k$  c)  $x \log x - \frac{x}{\ln 10} + 4x + k$

d)  $x \ln x - x - x^2 + \ln x + k$  e) 6,389 f) 1,249 g) 7,282 h) 0,543

4.19 a)  $1,5 \ln 4 \cdot 4^{0,5x} - e^{-0,5x}$  b)  $y = 1,0794x + 5$  c)  $Min: (-0,61; 4,68)$

4.20  $y = 2,5 \text{ meter}$

4.21  $V = 11490,6 \text{ m}^3$

4.22  $V = 10.500 \text{ m}^3$

$$4.23 V = 128 \text{ cm}^3$$

$$4.24 V = 15.312 \text{ cm}^3$$

## Kapitel 5

### Opgave 5.08

Min: 15

Max: 30

Typetal 24 og 27

Gennemsnit 23,3

Kvartilsæt: 20,24,27

Variationsbredde: 15

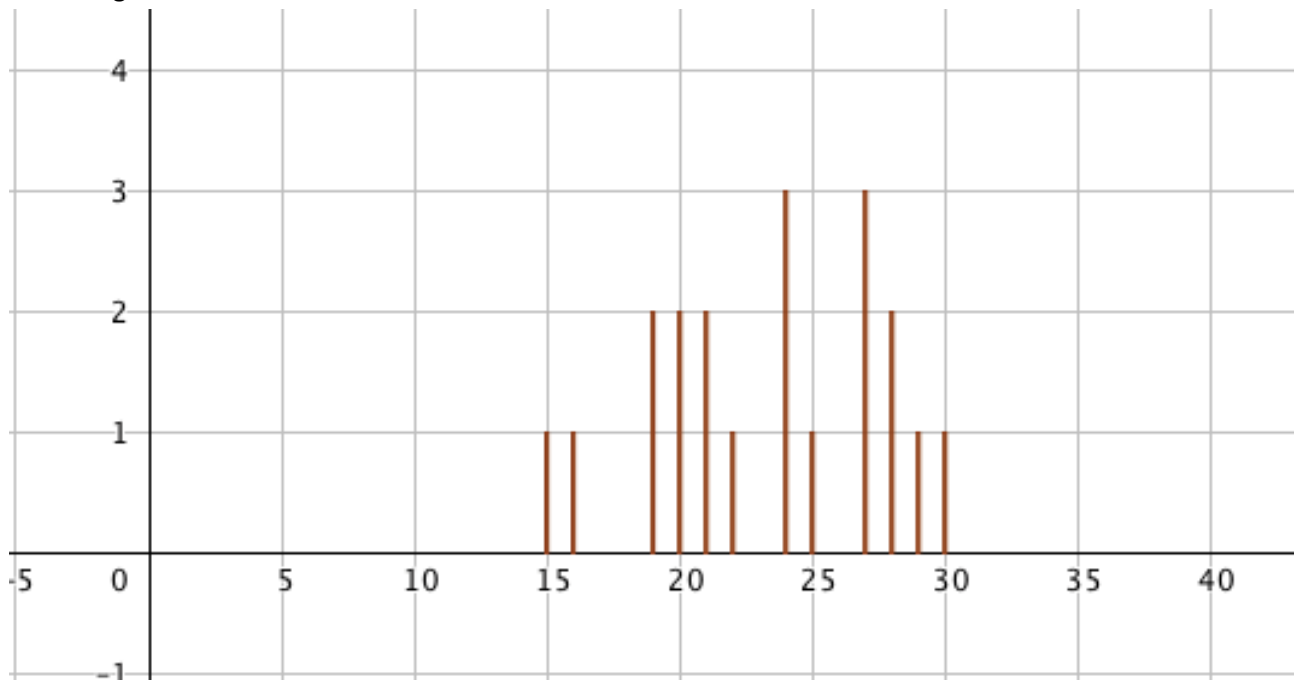
Kvartilafstand: 7

Varians: 18

Spredning 4,2438

Kastet i alt: 466 meter

Pindediagram:



### Opgave 5.09

Min: -12

Max: 8

Typetal: -10

Gennemsnit: -1,86

Kvartilsæt: -9,5 og -1,5 og 5

Peter har fødselsdag i februar



## Opgave 5.10

Min: 32

Max: 41

Typetal 33

Gennemsnit 35,03

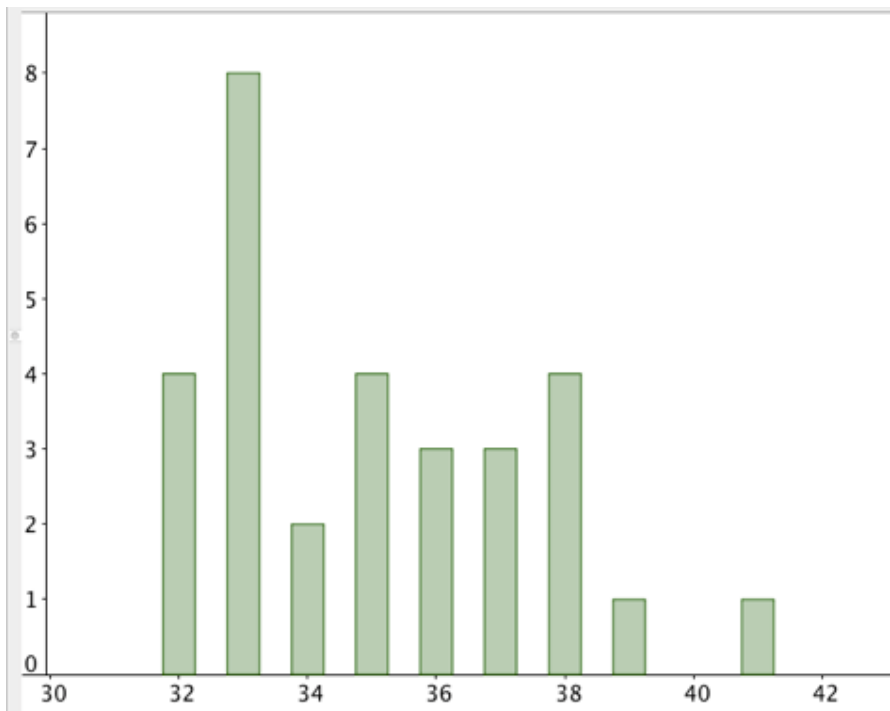
Kvartilsæt: 33 og 35 og 37

Variationsbredde: 9

Kvartilafstand: 4

Spredning 2,4012

Pindediagram:



### Opgave 5.11

$i$	Observation, $x_i$	Hyppighed, $h_i$	Frekvens, $f_i$	Summeret frekvens, $F_i$
1	15	1	0,05	0,05
2	16	1	0,05	0,1
3	19	2	0,1	0,2
4	20	2	0,1	0,3
5	21	2	0,1	0,4
6	22	1	0,05	0,45
7	24	3	0,15	0,6
8	25	1	0,05	0,65
9	27	3	0,15	0,8
10	28	2	0,1	0,9
11	29	1	0,05	0,95
12	30	1	0,05	1
		I alt 20	I alt 1	

### Opgave 5.12

$i$	Observation, $x_i$	Hyppighed, $h_i$	Frekvens, $f_i$	Summeret frekvens, $F_i$
1	-12	1	0,0357	0,0357
2	-11	2	0,0714	0,1071
3	-10	4	0,1429	0,2500
4	-9	1	0,0357	0,2857
5	-7	3	0,1071	0,3929
6	-5	1	0,0357	0,4286

7	-4	2	0,0714	0,5000
8	1	2	0,0714	0,5714
9	2	2	0,0714	0,6429
10	3	2	0,0714	0,7143
11	5	2	0,0714	0,7857
12	6	2	0,0714	0,8571
13	7	1	0,0357	0,8929
14	8	3	0,1071	1,0000
		28		

### Opgave 5.13

$i$	Observation, $x_i$	Hyppighed, $h_i$	Frekvens, $f_i$	Summeret frekvens, $F_i$
1	32	4	0,1333	0,1333
2	33	8	0,2667	0,4000
3	34	2	0,0667	0,4667
4	35	4	0,1333	0,6000
5	36	3	0,1000	0,7000
6	37	3	0,1000	0,8000
7	38	4	0,1333	0,9333
8	39	1	0,0333	0,9667
9	41	1	0,0333	1,0000
		30		

### Opgave 5.14

$$\bar{x} = \frac{25000 + 15000 + 40000 + 20000 + 50000}{5} = \frac{150000}{5} = 30000$$

Observation nr. $i$	$x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	25000	$(25000 - 30000)^2 = (-5000)^2 = 25.000.000$
2	15000	$(15000 - 30000)^2 = (-15000)^2 = 225.000.000$
3	40000	$(40000 - 30000)^2 = (10000)^2 = 100.000.000$
4	20000	$(20000 - 30000)^2 = (-10000)^2 = 100.000.000$
5	50000	$(50000 - 30000)^2 = (20000)^2 = 400.000.000$

$$SAK = 25.000.000 + 225.000.000 + 100.000.000 + 100.000.000 + 400.000.000 = 850.000.000$$

$$\text{VAR}_{\text{poker}} = \frac{850.000.000}{5} = 170.000.000$$

som er populationsvariationen.

Populationsspredningen findes som  $\sigma = \sqrt{170.000.000} = 13038,40$

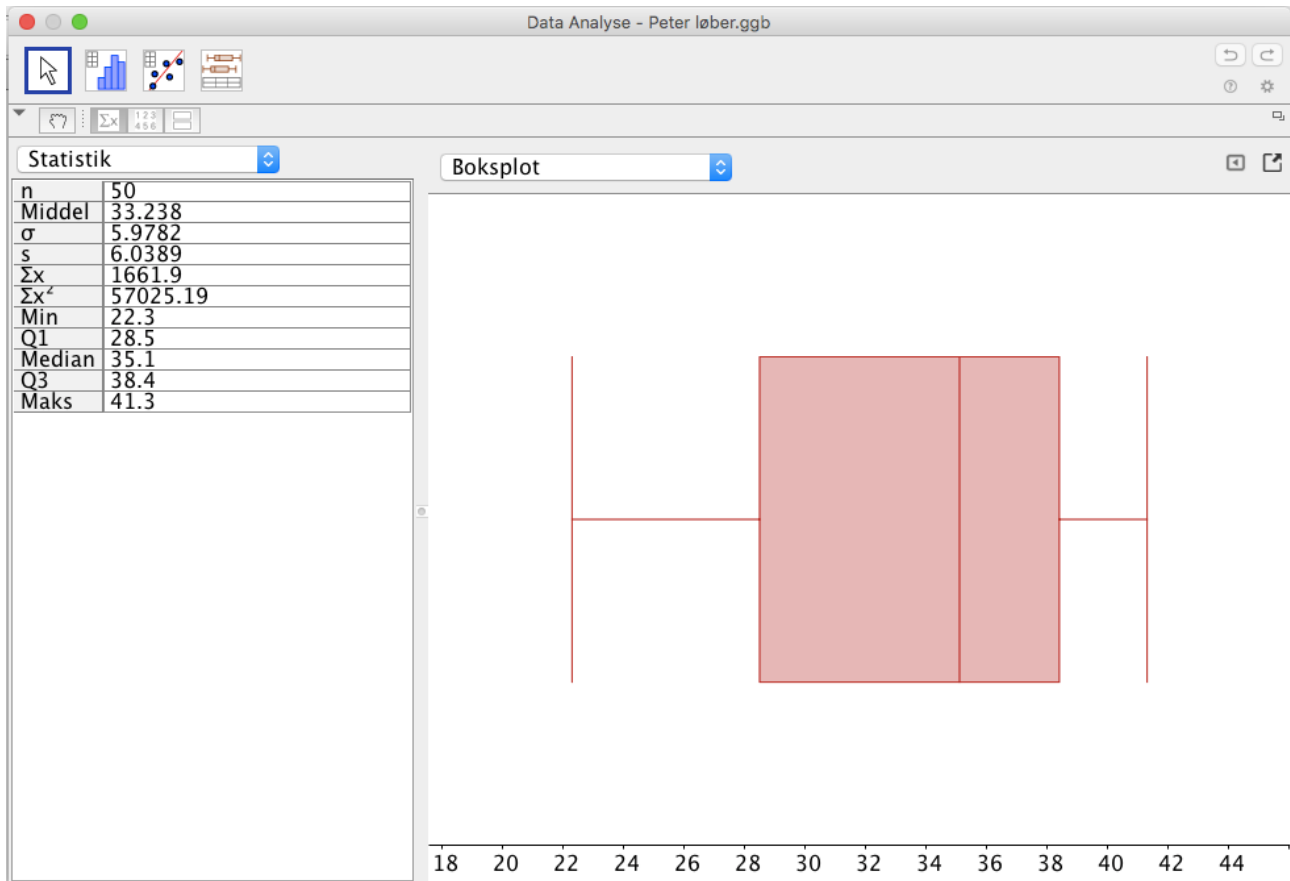
Stikprøvevariationen findes til:

$$\text{VAR}_{\text{poker}} = \frac{850.000.000}{4} = 212.500.000$$

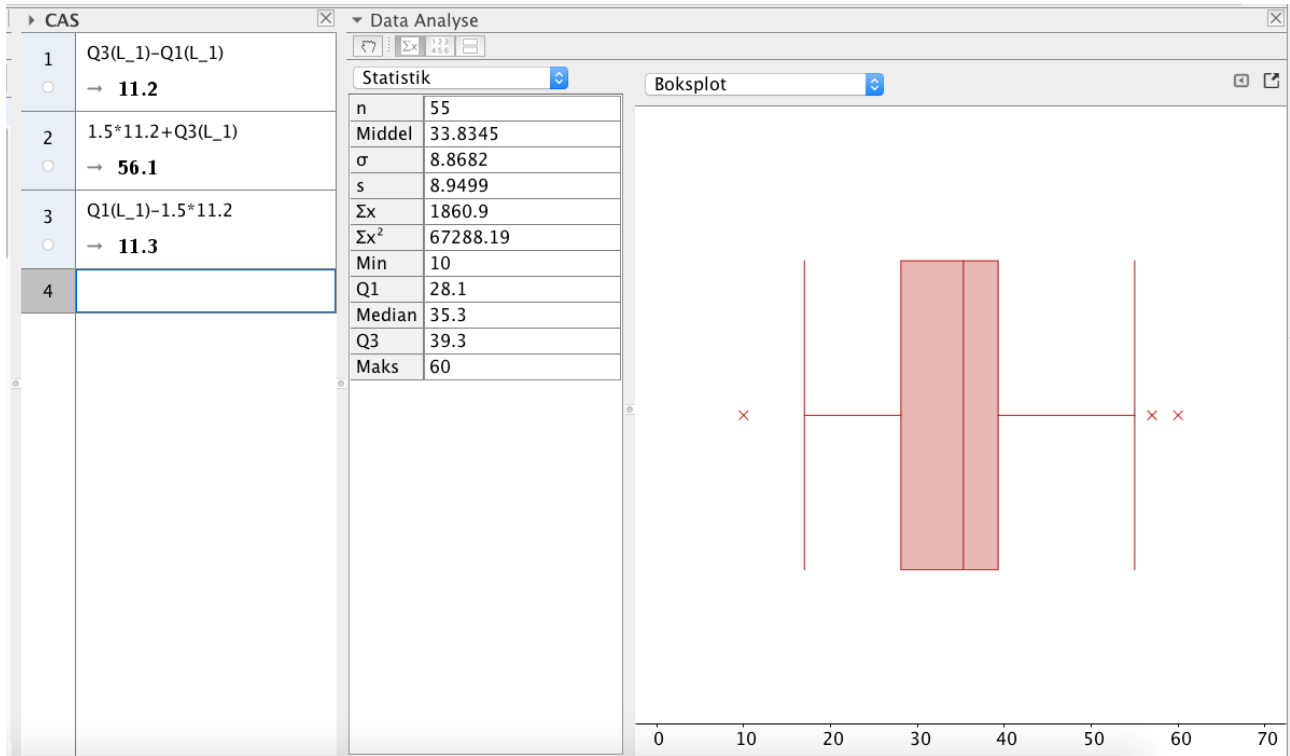
Stikprøvespredningen findes som  $s = \sqrt{212.500.000} = 13038,40 = 14577,38$

## Opgave 5.15

Min, max, Q1, median og Q3 kan ses i venstre side af nedenstående billede:



## Opgave 5.16



## Opgave 5.17

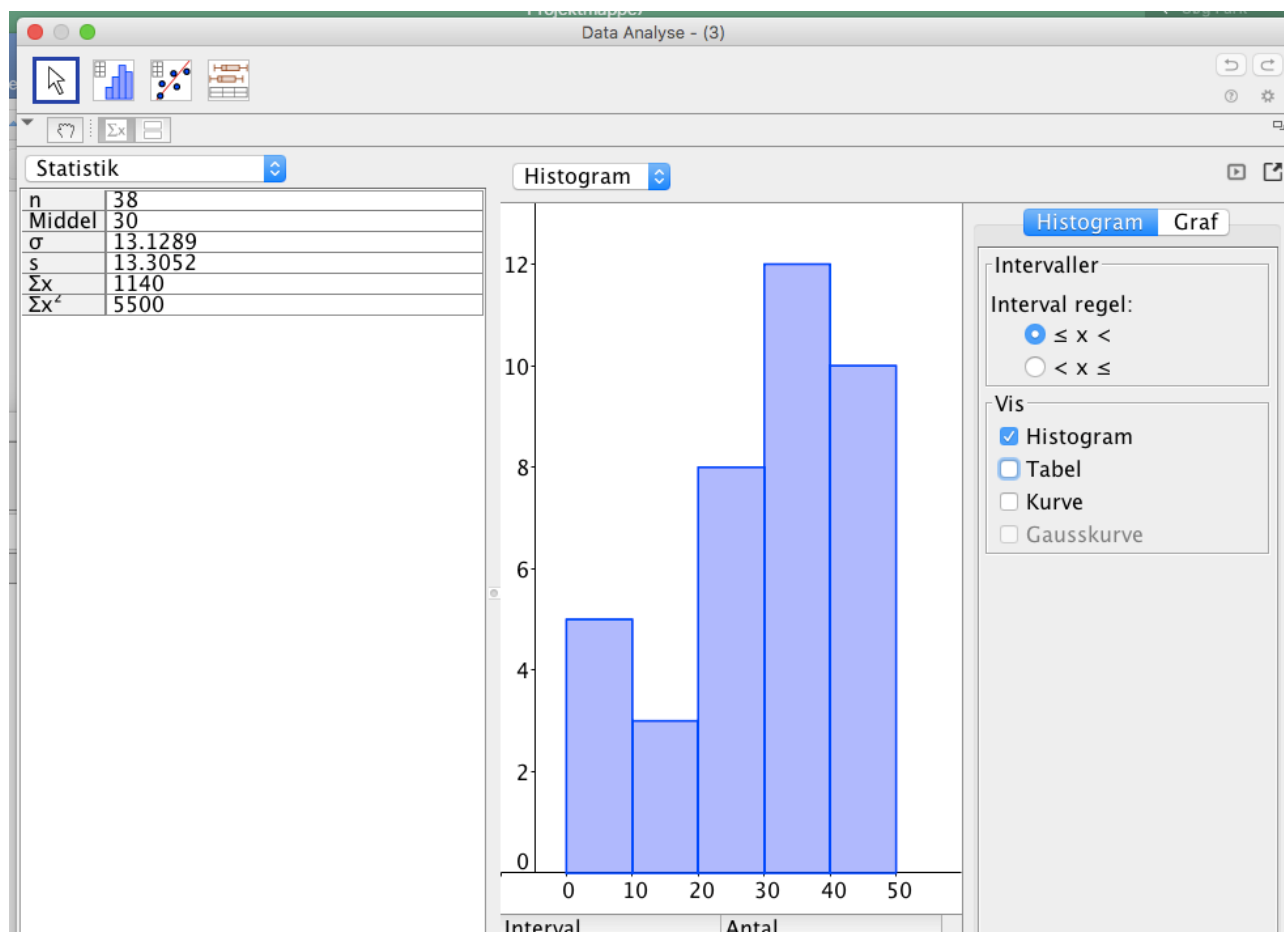
5, 15, 25, 35, 45

## Opgave 5.18

$$5+3+8+12+10=38$$

Typeintervallet er ]30;40]

## Opgave 5.19



## Opgave 5.20

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 5 + 3 \cdot 15 + 8 \cdot 25 + 12 \cdot 35 + 10 \cdot 45}{38} = \frac{1140}{38} = 30$$

## Opgave 5.21

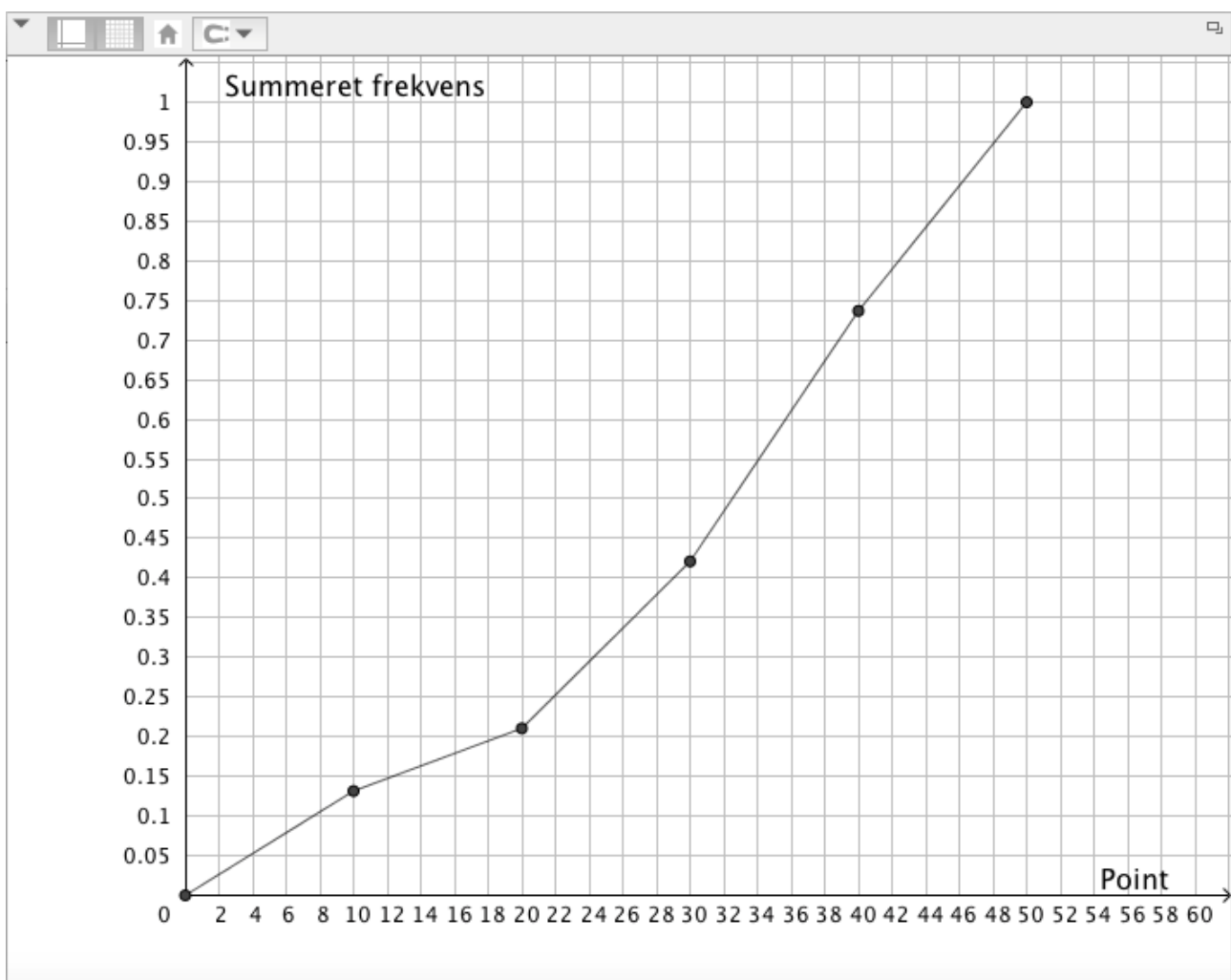
Interval	$i$	Midtpunkt, $m_i$	Hyppighed, $h_i$	Produkt, $m_i \cdot h_i$	Frekvens, $f_i$	Summeret frekvens, $F_i$
]0,10]	1	5	5	25	$5/38=0,1316$	$5/38=0,1316$
]10,20]	2	15	3	45	$3/38=0,0789$	$8/38=0,2105$



]20,30]	3	25	8	200	$8/38=0,2105$	$16/38=0,4211$
]30,40]	4	35	12	420	$12/38=0,3158$	$28/38=0,7368$
]40,50]	5	45	10	450	$10/38=0,2632$	$38/38=1$
			$n=38$	Total=1140	$\Sigma f_i=1,00$	

## Opgave 5.22

Her er sumkurven tegnet. Støttestrukturerne er markeret med •.

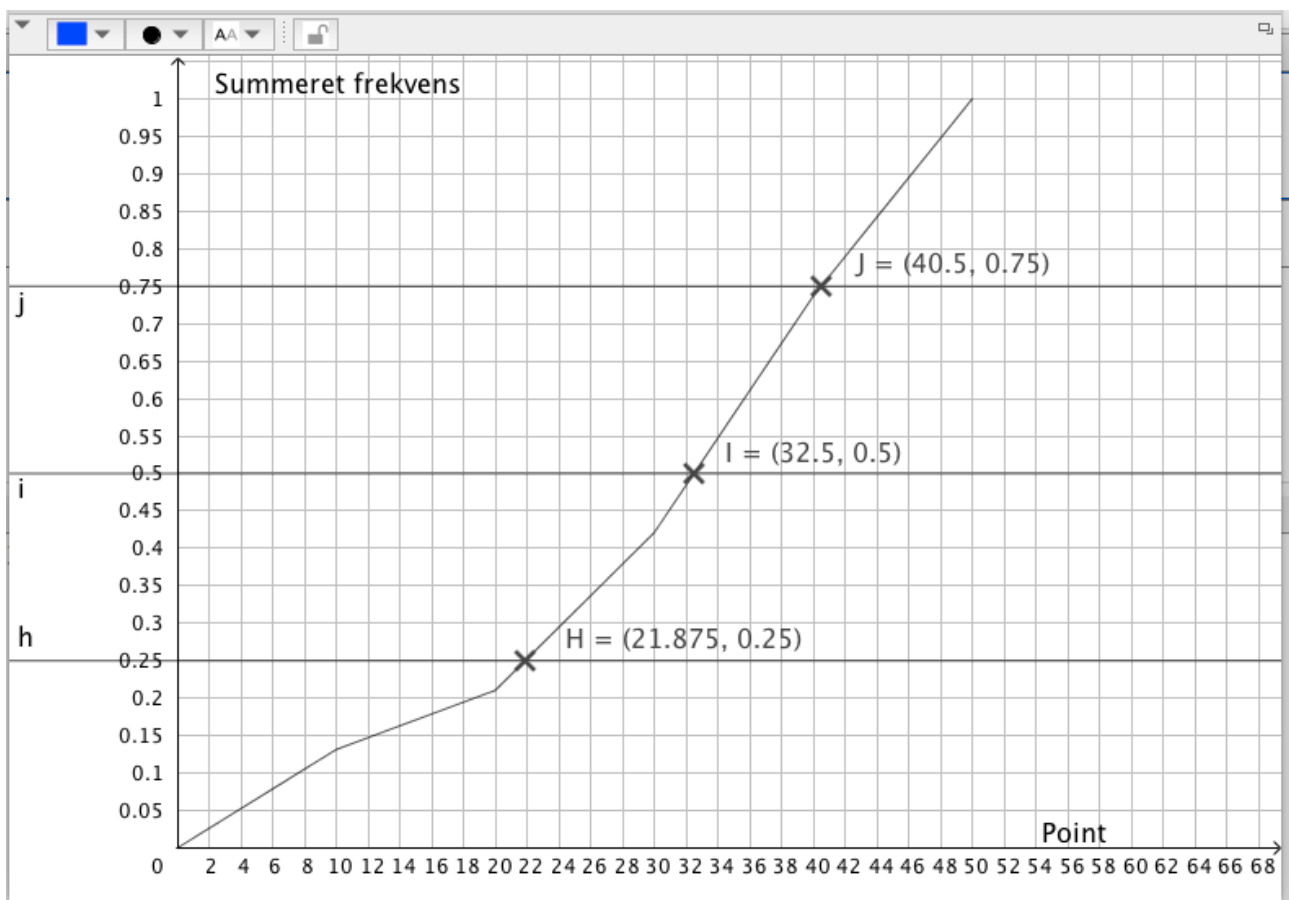


Her er sumkurven tegnet, og kvartilsættet kan aflæses som førstekoordinaten til punktet, hvor hhv.  $y=0,25$ ,  $y=0,5$  og  $y=0,75$  skærer sumkurven. De tre steder er markeret med kryds.

Nedre kvartil: 21,875

Median: 32,5

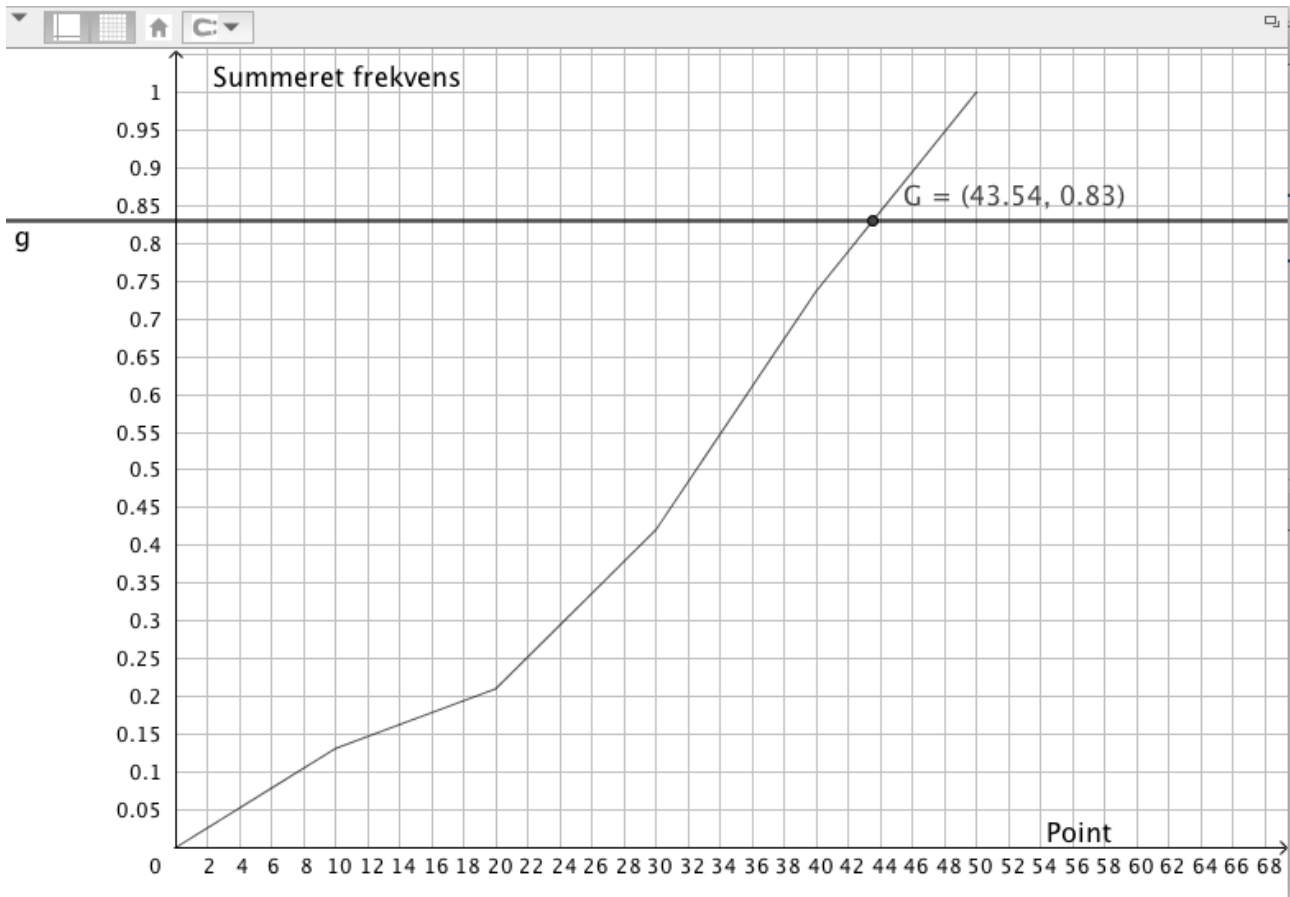
Øvre kvartil: 40,5



### Opgave 5.23

Find 0,83-fraktilen da  $1-0,17=0,83$ .

0,83-fraktilen er 43,54. Det vil sige at 17% af eleverne har fået 43,54 point eller derover.

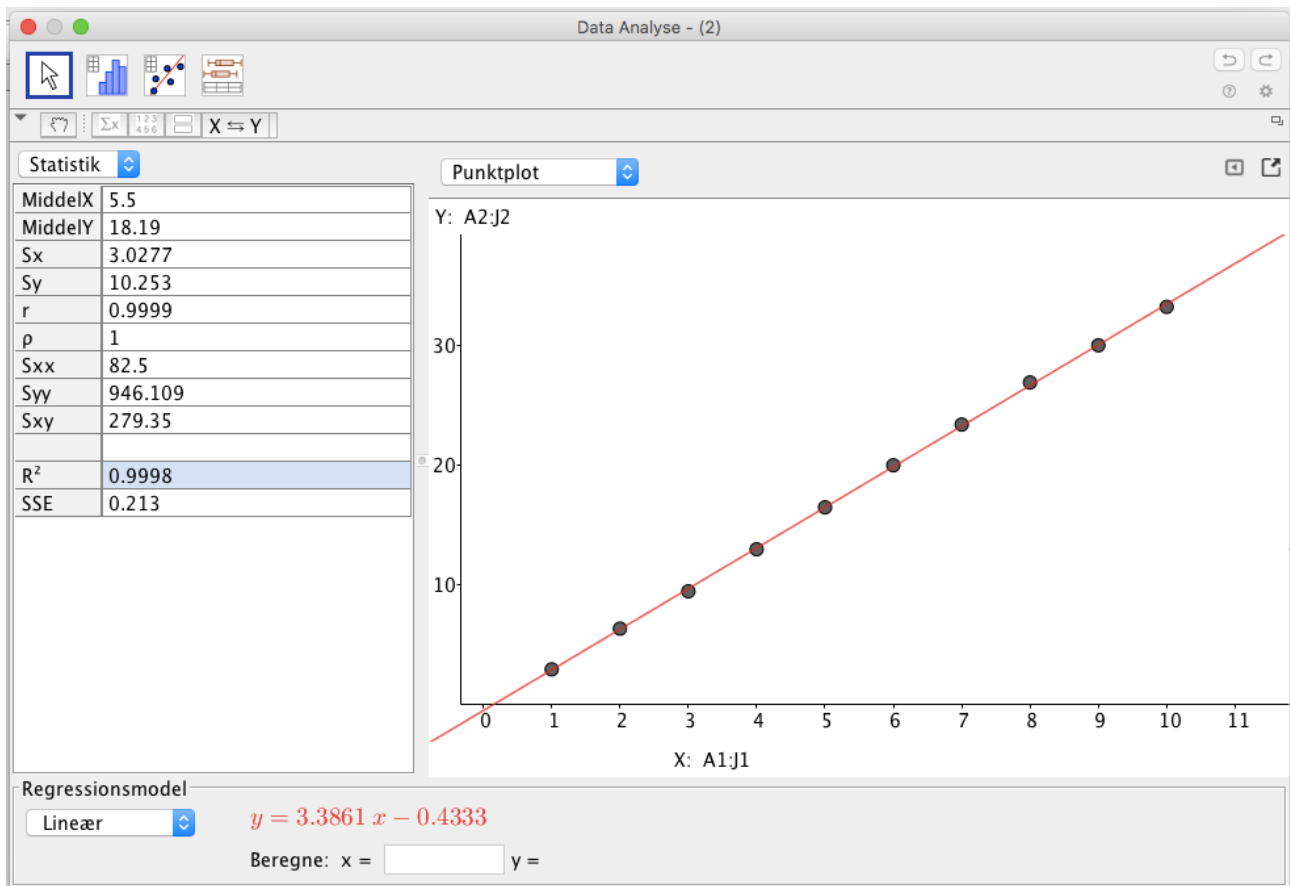


### Opgave 5.24

Se tegning.

Model  $y=3,3861x-0,4333$

Determinationskoefficienten =  $R^2=0,9998$ . Meget fin sammenhæng.

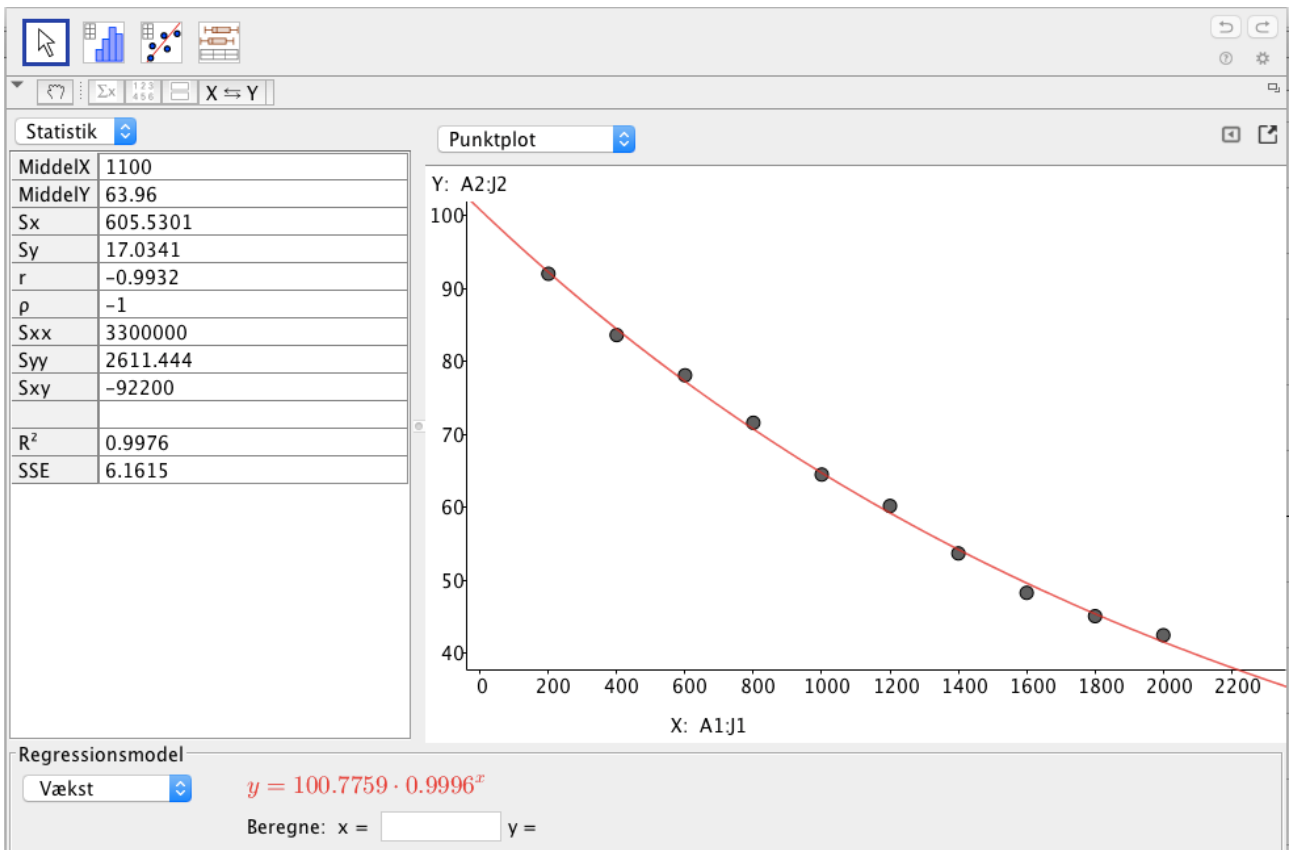


## Opgave 5.25

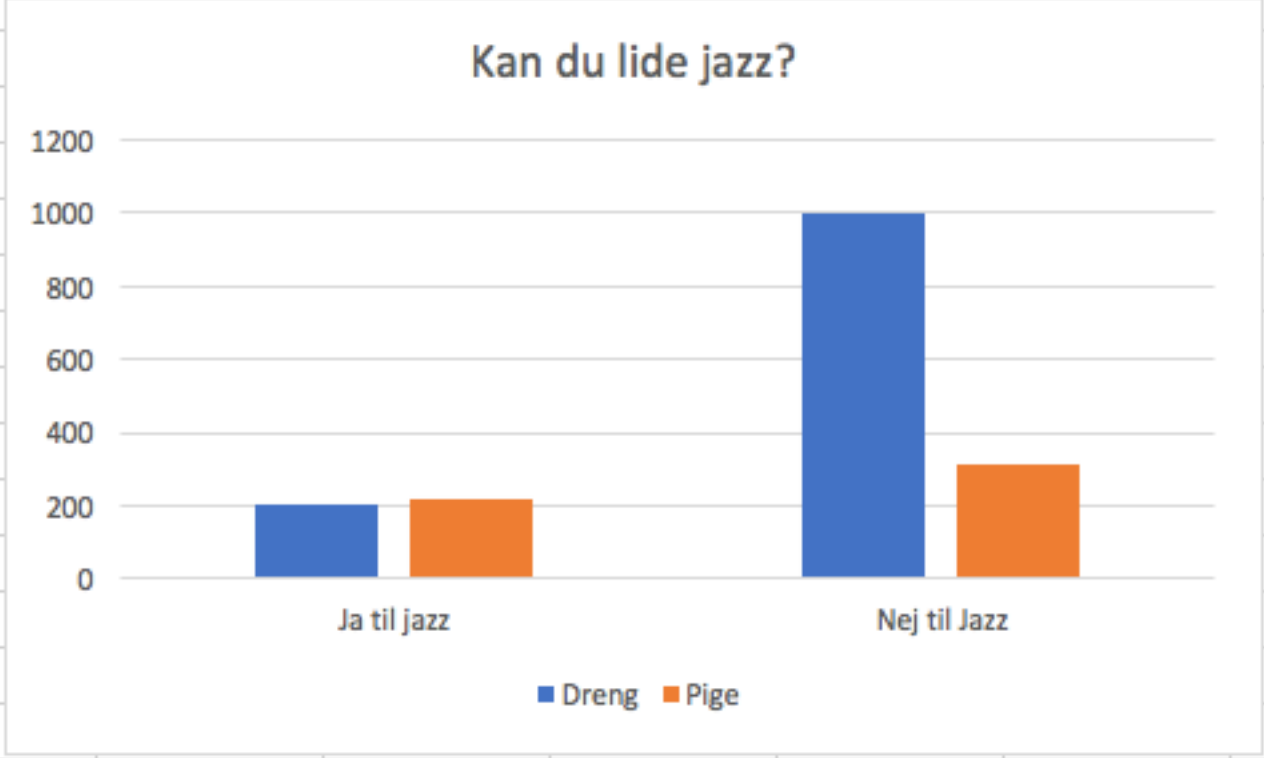
Se tegning.

$$\text{Model } y = 100,7759 \cdot 0,9996^x$$

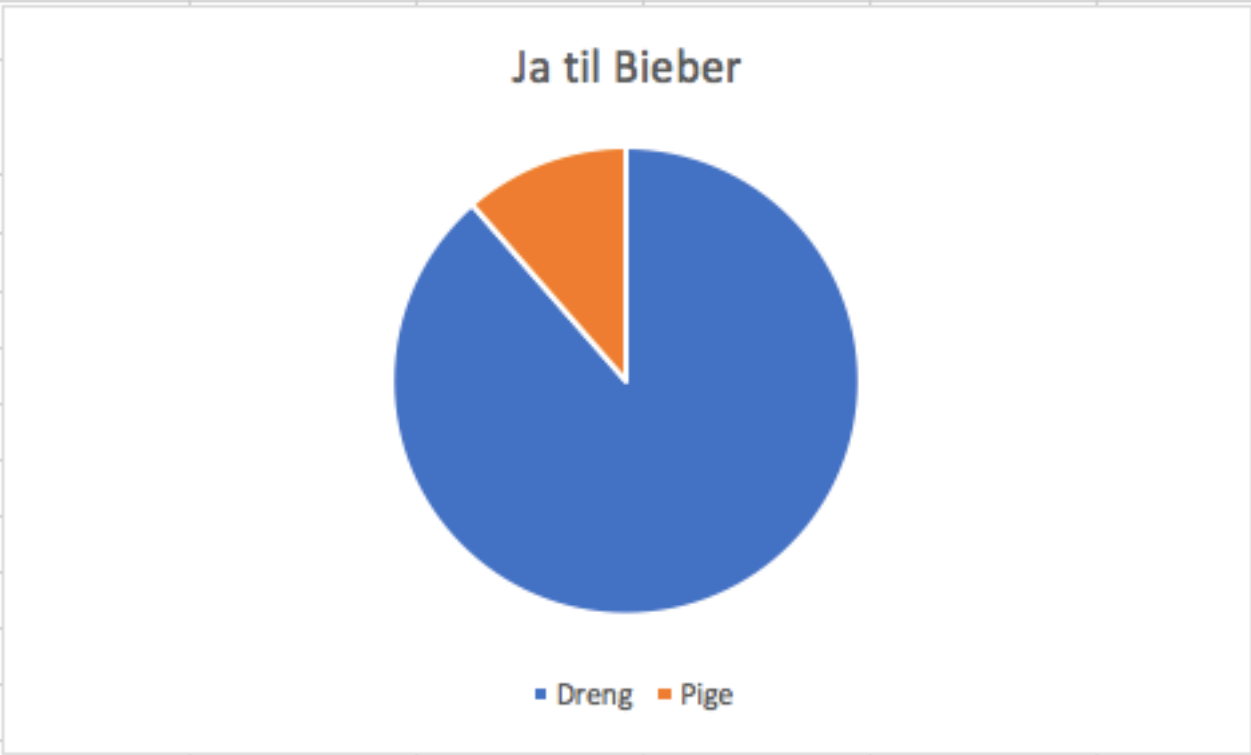
Determinationskoefficienten =  $R^2=0,9976$ . Meget fin sammenhæng.



Opgave 5.26



Opgave 5.27



## Nej til Bieber



■ Dreng ■ Pige